CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**D**

Zadanie 2. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**A**

Zadanie 3. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 4. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ (2.a).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**D**

Zadanie 5. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (2.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 6. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).	C	A

Zadanie 7. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	D	B

Zadanie 8. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	D	A

Zadanie 9. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.e).	A	C

Zadanie 10. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji zbiór wartości (4.b).	D	B

Zadanie 11. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.k).	B	A

Zadanie 12. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	B	D

Zadanie 13. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">IV. Użycie i tworzenie strategii.</td><td rowspan="2">7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>A</td><td>C</td></tr></table>

Zadanie 14. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.c).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>A</td><td>B</td></tr></table>

Zadanie 15. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</td><td rowspan="2">5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>D</td><td>C</td></tr></table>

Zadanie 16. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</td><td rowspan="2">7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td></tr></table>

Zadanie 17. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">IV. Użycie i tworzenie strategii.</td><td rowspan="2">6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>C</td><td>B</td></tr></table>

Zadanie 18. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>D</td><td>A</td></tr></table>

Zadanie 19. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">IV. Użycie i tworzenie strategii.</td><td rowspan="2">7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td></tr></table>

Zadanie 20. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	**C**	**D**

Zadanie 21. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f).	**B**	**C**

Zadanie 22. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	**C**	**B**

Zadanie 23. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	**D**	**B**

Zadanie 24. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	**B**	**A**

Zadanie 25. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	**C**	**D**

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap rozwiązania:
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$.

- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta=5^2-4\cdot(-3)\cdot 2=49$ i stąd $x_1=\frac{-5-7}{4}=-3$ oraz $x_2=\frac{-5+7}{4}=\frac{1}{2}$,

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}$ oraz $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$, stąd $x_1=-3$ oraz $x_2=\frac{1}{2}$,

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub zaznaczając je na wykresie $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Drugi etap rozwiązania:
Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku górze i zaznaczamy na osi Ox miejsca zerowe trójmianu.
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$,

lub ($x<-3$ lub $x>\frac{1}{2}$).

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$: $x_1=-3$, $x_2=\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błędy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ lub ($x<-3$ lub $x>\frac{1}{2}$).

albo

- sporządzi ilustrację graficzną (oś liczbowa, parabola) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < -3$, $x > \frac{1}{2}$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwaga:
Jeśli pierwiastki trójmianu są wyznaczone przy zastosowaniu błędnej metody, to za całe rozwiązanie zdający otrzymuje **0 punktów**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki
Akceptujemy zapis przedziałów nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej lub błędów w przepisaniu, np.: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (-3, +\infty)$ lub $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$, lub $(-\infty, 3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Zadanie 27. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów $x^2(x+3) + 2(x+3) = 0$ lub $x(x^2+2) + 3(x^2+2) = 0$, stąd $(x+3)(x^2+2) = 0$. Ponieważ wyrażenie $x^2 + 2$ jest dodatnie, więc $x = -3$.

II sposób
Stwierdzamy, że liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $(x+3)$ i otrzymujemy iloraz (x^2+2). Mamy więc równanie postaci $(x+3)(x^2+2) = 0$, a stąd otrzymujemy $x = -3$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 p.

- gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynowej, np.: $(x+3)(x^2+2) = 0$

albo

- gdy podzieli wielomian $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ przez dwumian $(x+3)$, otrzyma iloraz (x^2+2)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x = -3$.

Zadanie 28. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).

Przykładowe rozwiązania

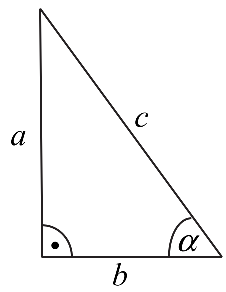
I sposób

Przekształcamy wyrażenie $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i otrzymujemy $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$.

Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}$, a stąd $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$, a zatem $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

II sposób

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych a i b oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Ponieważ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{3}{2}$, więc $\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2=\frac{3}{2}$, czyli $\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2}=\frac{3}{2}$.

Stąd $\frac{c^2+2ab}{c^2}=1+\frac{2ab}{c^2}=\frac{3}{2}$, zatem $\frac{ab}{c^2}=\frac{1}{4}$.

Ponieważ $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ i $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, to $\frac{ab}{c^2}=\frac{1}{4}$. Zatem $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

- gdy przekształci wyrażenie $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ do postaci $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

albo

- gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b, zaznaczy w tym trójkącie kąt α i zapisze $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje...2 p.

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie wyznaczy funkcje trygonometryczne do kąta wskazanego na rysunku i z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Niech $|\sphericalangle ACB| = \alpha$.

Ponieważ $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$.

W ΔCDE: $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Trójkąt CDE jest prostokątny oraz $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Podobnie trójkąt BFG jest prostokątny i $|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle BFG| = \alpha$.

Ponieważ trójkąty CDE i BFG mają równe kąty, więc na podstawie cechy podobieństwa *kkk* są podobne.

II sposób
Niech $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$.

Trójkąt CED jest podobny do trójkąta ABC (cecha *kkk*), bo $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DEC| = 90^\circ$.

Podobnie trójkąt GBF jest podobny do trójkąta ABC, (cecha *kkk*), bo $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FGB| = 90^\circ$.

Stąd trójkąt CED jest podobny do trójkąta FBG (z przechodniości relacji podobieństwa).

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- wskaże w dwóch trójkątach spośród trójkątów CBA, CDE i FBG jedną parę równych kątów ostrych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, przy czym kąt przy wierzchołku B musi być wskazany dwukrotnie, jako kąt w obu trójkątach CBA i FBG, np. zdający zapisze $|\sphericalangle FBG| = |\sphericalangle CBA|$ lub stwierdzi, że jest to wspólny kąt trójkątów CBA i FBG (analogicznie z kątem przy wierzchołku C w trójkątach CBA i CDE)

albo

- zapisze, że trójkąt CBA jest podobny do trójkąta FBG i do trójkąta CDE i stąd wywnioskuje, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG, ale nie wskaże żadnej pary równych kątów ostrych w tych trójkątach

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający przyjmie konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający przyjmie błędne zależności między kątami, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ (2.a).

Przykładowe rozwiązanie
Rozważmy wyraz $a_n = 2n^2 + 2n$.
Wyraz a_{n+1} można zapisać, jako

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 6n + 4.$$

Wtedy

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4.$$

Zatem

$$a_n + a_{n+1} = (2n+2)^2.$$

Liczba $2n+2$ jest naturalna. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy poprawnie zapisze sumę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu, np:

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga:
Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych wartości n, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).

Przykładowe rozwiązanie
Wykorzystujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie z niewiadomą n: $S_n = \frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$.
Obliczamy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego n: $n = 42$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje..1 p.

gdy zapisze

- równanie z niewiadomą n: $\frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$

albo

- układ równań z niewiadomymi n i r: $\begin{cases} 7+(n-1)r = 89 \\ 2016 = \frac{2\cdot 7+(n-1)r}{2} \cdot n \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..2 p.

gdy obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego: 42.

Zadanie 32. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech α oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha+50^\circ$ oraz 3α. Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\alpha+3\alpha+\alpha+50^\circ=180^\circ,$$
$$5\alpha=130^\circ,$$
$$\alpha=26^\circ.$$

Stąd $\alpha+50^\circ=76^\circ$ oraz $3\alpha=78^\circ$.

II sposób

Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\frac{\alpha}{3}+50^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3}$.

Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+50^\circ+\alpha=180^\circ,$$
$$5\alpha=390^\circ,$$
$$\alpha=78^\circ.$$

Stąd $\frac{\alpha}{3}=26^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3}+50^\circ=76^\circ$.

III sposób

Niech α oznacza ten kąt trójkąta, który nie jest ani największy, ani najmniejszy. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha-50^\circ$ oraz $3(\alpha-50^\circ)$. Suma kątów trójkąta jest równa 180°, więc

$$\alpha-50^\circ+\alpha+3(\alpha-50^\circ)=180^\circ,$$
$$5\alpha=380^\circ,$$
$$\alpha=76^\circ.$$

Stąd $\alpha-50^\circ=26^\circ$ oraz $3(\alpha-50^\circ)=78^\circ$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze:

- kąty trójkąta w zależności od jednego kąta, np.:

$$\alpha,\ \alpha+50^\circ,\ 3\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}+50^\circ, \alpha, \quad \text{lub} \quad \alpha-50^\circ, \alpha, 3(\alpha-50^\circ)$$

albo

- układ dwóch równań, np.

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+50^\circ+\beta=180^\circ \\ \beta=3\alpha, \end{cases}$$

albo

- układ trzech równań, np.

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=180^\circ \\ \gamma=3\alpha \\ \beta=\alpha+50^\circ \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\alpha+3\alpha+\alpha+50^\circ=180^\circ \text{ lub } \frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+50^\circ+\alpha=180^\circ, \text{ lub } \alpha-50^\circ+\alpha+3(\alpha-50^\circ)=180^\circ$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.
Zdający obliczy jeden z kątów trójkąta, np.: $\alpha=26^\circ$ lub $\alpha=78^\circ$, lub $\alpha=76^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ....4 p.
Zdający obliczy wszystkie kąty trójkąta.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda kąty ($26^\circ, 76^\circ, 78^\circ$), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający tylko poda kąty i sprawdzi wszystkie warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 33. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (3.b).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia:
x – początkowa liczba osób planujących wyjazd, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią;
y – początkowy koszt wynajęcia busa przypadający na jednego uczestnika biwaku, $y > 16$.

Zapisujemy zależność między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a ostatecznym jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.: $(x+2)\cdot(y-16)=960$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} x\cdot y=960 \\ (x+2)\cdot(y-16)=960 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y=\frac{960}{x}$,	$x=\frac{960}{y}$,
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x+2)\cdot\left(\frac{960}{x}-16\right)=960$. Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: $x^2+2x-120=0$. Obliczamy $\Delta=4+480=22^2$, $x_1=\frac{-2-22}{2}=-12$, co jest sprzeczne z założeniem $x>0$, $x_2=\frac{-2+22}{2}=10$. Obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak $x+2=12$.	$\left(\frac{960}{y}+2\right)\cdot(y-16)=960$. Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: $y^2-16y-7680=0$. Obliczamy $\Delta=256+30720=176^2$, $y_1=\frac{16-176}{2}=-80$, co jest sprzeczne z założeniem $y>16$, $y_2=\frac{16+176}{2}=96$. Obliczamy początkową liczbę osób planujących wyjazd $x=\frac{960}{96}=10$ oraz obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak $x+2=12$.
Odpowiedź: Ostatecznie na biwak wyjechało 12 osób.	

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 p.**

Zapisanie zależności między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.: $(x+2)\cdot(y-16)=960$, gdzie x oznacza początkową liczbę osób planujących wyjazd, a y – jednostkowy początkowy koszt wynajęcia busa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi x i y – odpowiednio z początkową liczbę osób planujących wyjazd i jednostkowym początkowym kosztem wynajęcia busa:

$$\begin{cases} x\cdot y=960 \\ (x+2)\cdot(y-16)=960. \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający sprowadzi układ równań do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(x+2)\cdot\left(\frac{960}{x}-16\right)=960 \text{ lub } \left(\frac{960}{y}+2\right)\cdot(y-16)=960, \text{ lub } x^2+2x-120=0,$$

$$\text{lub } y^2-16y-7680=0.$$

Uwaga:

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 p.**

Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą x i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą y i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- obliczy y z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku: 12.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda rozwiązanie, to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający założy, że koszt jest liczbą całkowitą, rozpatrzy rozkłady liczby 960 na iloczyn dwóch czynników, wśród których są rozkłady:

$$10 \cdot 96 = 960$$
$$12 \cdot 80 = 960$$

i poda poprawną odpowiedź, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający przyjmie x jako liczbę osób, które ostatecznie pojechały na biwak i poda $x+2=14$, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Jeżeli zdający popełni błąd (np.: $x_2 = \frac{2+22}{2} = 12$ lub rachunkowy) w wyznaczaniu pierwiastków równania kwadratowego, przy czym otrzyma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów.
2. Jeżeli zdający otrzyma poprawne równanie wymierne, a następnie przekształci je z błędem do równania kwadratowego i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów, o ile otrzymane równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne.

Zadanie 34. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia, wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.b,d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y) dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10,11,12,...,99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90 \cdot 89$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(10,20)$, $(11,19)$, $(12,18)$, $(13,17)$, $(14,16)$, $(16,14)$, $(17,13)$, $(18,12)$, $(19,11)$, $(20,10)$.

Ich liczba jest równa $|A| = 10$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest zbiór dwuelementowy $\{x, y\}$ dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10,11,12,...,99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \binom{90}{2} = \frac{90!}{88! \cdot 2!} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$\{10,20\}$, $\{11,19\}$, $\{12,18\}$, $\{13,17\}$, $\{14,16\}$.

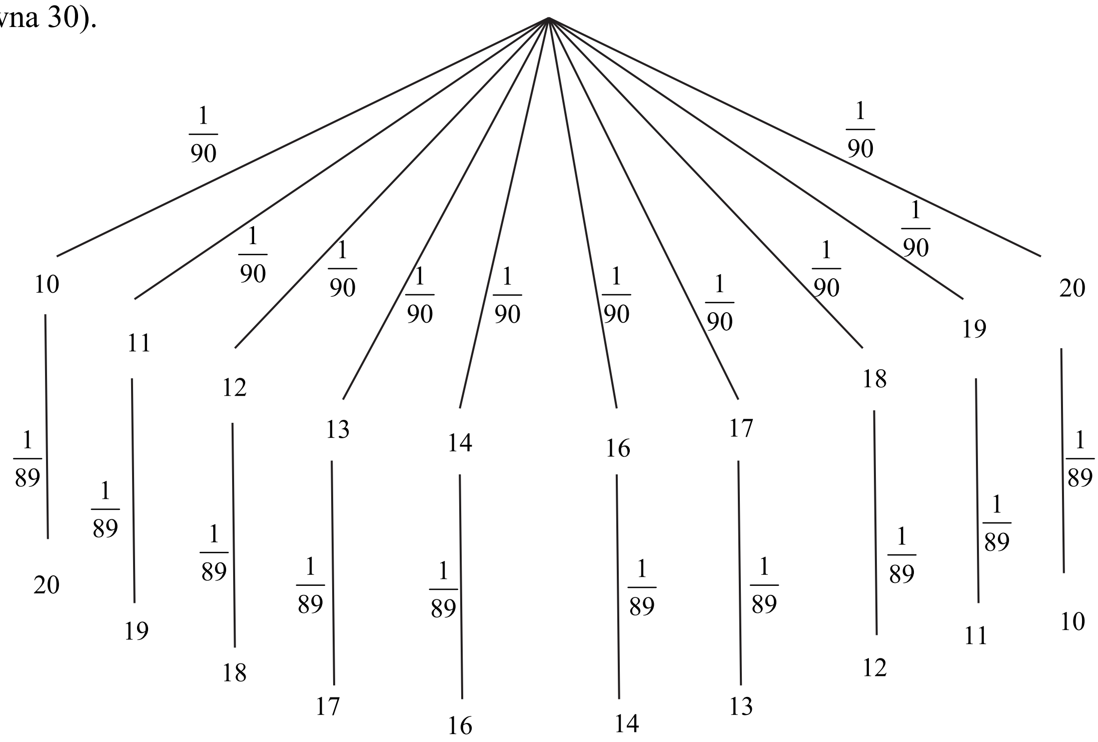
Ich liczba jest równa $|A| = 5$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{45 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

III sposób
Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe
$P(A)=10\cdot\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}=\frac{1}{9\cdot 89}=\frac{1}{801}$.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90

albo
- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
  $(10,20)$, $(11,19)$, $(12,18)$, $(13,17)$, $(14,16)$, $(16,14)$, $(17,13)$, $(18,12)$, $(19,11)$, $(20,10)$
  lub $\{10,20\}$, $\{11,19\}$, $\{12,18\}$, $\{13,17\}$, $\{14,16\}$,

albo
- zapisze, że $|A|=10$ lub $|A|=5$,

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 p.
Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90
  oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
  $(10,20)$, $(11,19)$, $(12,18)$, $(13,17)$, $(14,16)$, $(16,14)$, $(17,13)$, $(18,12)$, $(19,11)$, $(20,10)$
  lub $\{10,20\}$, $\{11,19\}$, $\{12,18\}$, $\{13,17\}$, $\{14,16\}$

albo

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz zapisze, że $|A|=10$ lub $|A|=5$,

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90\cdot 89$ lub $|\Omega|=\binom{90}{2}$, lub $|\Omega|=\frac{90\cdot 89}{2}$, lub $|\Omega|=4005$,

albo

- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 p.
Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90\cdot 89$ oraz zapisze, że $|A|=10$

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=\binom{90}{2}$ lub $|\Omega|=\frac{90\cdot 89}{2}$, lub $|\Omega|=4005$ oraz zapisze, że $|A|=5$,

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi narysowanego drzewa: $\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne ....4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{801}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych

sprzyjających zdarzeniu A i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

2. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 89 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli w rozwiązaniu występuje sprzeczność modeli probabilistycznych, to zdający może otrzymać, co najwyżej **2 punkty**.
4. Akceptujemy sytuacje, gdy zdający zamiast wypisywania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A zapisze następujące sumy $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$, $16+14$, $17+13$, $18+12$, $19+11$, $20+10$ (lub tylko $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$).
5. Jeżeli zdający zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, ale przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, zapisuje sumę $15+15$ i na tym zakończy to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, np. $\frac{1}{801}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.